# コンパクト対称空間上の対蹠集合のデザイン理論について (デザイン、符号、グラフおよびその周辺)

AUTHOR(S):

栗原, 大武

数理解析研究所講究録
第 1844 巻 2013 年 124-138



# コンパクト対称空間上の対蹠集合のデザイン理論について

栗原 大武*

京都大学数理解析研究所 GCOE 特定研究員

## 1 序

本報告書ではコンパクト対称空間の中でも複素グラスマン空間に制限し，複素グラスマン空間上の大対蹠集合をデザイン理論の立場から定理 5.9 の形で特徴づける．本研究は奥田隆幸氏との共同研究である．

1973 年に Delsarte [9] はアソシエーションの理論を用いて，符号理論とデザイン理論を統一した．その際重要な役割を果たしたのが $P$ 多項式アソシエーションスキームや $Q$ 多項式アソシエーションスキームに付随する直交多項式であり，これらの多項式を用いることで符号やデザインのサイズに関する限界を与えた．その後，Delsarte の理論の類似として，Delsarte–Goethals–Seidel [10] は実または複素射影空間上の符号理論を考察した．一方で Delsarte–Goethals–Seidel [11] は球面上のデザイン理論を構築した．これらの仕事の中で，Jacobi 多項式や Gegenbauer 多項式は符号やデザインのサイズの限界を与えるために重要な役割を果たす．以上の理論を俯瞰してみると，多項式アソシエーションスキームに付随する直交多項式や Jacobi 多項式や Gegenbauer 多項式のような適切な多項式を備えている空間があれば，その空間上で上記で述べた符号理論やデザイン理論が展開できる．そのような空間を統一的に扱うために Delsarte 空間や多項式空間の概念が導入された．Delsarte 空間についての詳細は Neumaier [22] や Godsil [12]，多項式空間についての詳細は Levenshtein [19, 20, 18] などを参照されたい．連続空間になる Delsarte 空間や多項式空間の最も自然かつ重要な例として，階数 1 のコンパクト対称空間が挙げられる．最初に述べた球面や射影空間は階数 1 のコンパクト対称空間であることに注意されたい．階数 1 のコンパクト対称空間上の符号理論とデザイン理論は Hoggar [13] によって構築された．この枠組みで，堅いデザインと呼ばれるデザインの分類問題が精力的に研究された．ここで堅いデザインとは，サイズに関する自然な下界を満たすデザインのことをいう．階数 1 のコンパクト対称空間上の堅いデザインの分類に関しての詳細は Bannai–Hoggar [5, 6]，Hoggar [14, 15]，Lyubich [21] などを参照されたい．

一方で一般のコンパクト対称空間上の符号理論やデザイン理論を構築するのは容易くはない．しかし，一般のコンパクト対称空間の中でも扱いやすいものの一つとして挙げられるグラスマン空間に対しては，その空間上の符号理論やデザイン理論の構築にいくつかの進展がある．これに関しての詳細は Bachoc–Coulangeon–Nebe [1]，Bachoc–Bannai–Coulangeon [2]，Roy [23] などを参照されたい．上記で述べた様々な空間上の符号理論やデザイン理論の歴史を Bannai–Bannai [4] が詳しく取り扱っているので，一読することを推奨する．

球面上の対蹠点の概念は Chen–Nagano [8] によって対称空間上の対蹠集合として一般化された．対蹠集合のサイズは有限になることが示されているので，対蹠集合の中で最大のサイズをもつ対蹠集合が存在する．この対蹠集合を大対蹠集合と呼ぶ．その後，対称空間がエルミート型であれば，任意の 2 つの大対蹠集合は合同であることが Tanaka–Tasaki [25] によって示された．球面上に於いて，堅い奇数次の球面デザインは極対的になる．ここで球面上の大対蹠集合は，極対的な点同士の組 $\{x,-x\}$ からなる．対蹠集合に関しては再度 2.1 節で説明する．本報告書では特に複素グラスマン空間上の大対蹠集合に注目する．複素グラスマン空間はエルミート型

* E-mail : kurihara@kurims.kyoto-u.ac.jp

の対称空間の中でも最も重要な例である．$n \geq 2m$ を満たす正の整数 $n, m$ に対して，複素グラスマン空間 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ は $n$ 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の $m$ 次元部分空間全体からなる集合として定義される．このとき $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の大対蹠集合 $S$ は $\binom{n}{m}$ 点からなることが示される．先程述べたことより $S$ は $U(n)$ 作用を除き一意に定まる．我々の目標は $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の大対蹠集合 $S$ をとある堅いデザインとして特徴づけることである．

$\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上のデザイン理論は 2009 年に Roy [23] によって導入された．しかしデザイン理論の観点から大対蹠集合を捉えるためには，もっと広い枠組みでデザインを定義し直す必要がある．そこで我々は 4 節において，ユニタリ群の既約表現の添字を用いて改めてデザインを定義する．実際には，$\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上のデザインを

$$P_m := \{ (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{N}^m \mid \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_m \geq 0 \}$$

の部分集合 $\mathcal{T}$ を用いて定義する．4 節では，我々の定義に関して，$\mathcal{T}$ デザインのサイズの下界を Delsarte 理論を用いて与える．そして 5 節では，どのような $\mathcal{T} \subset P_m$ に対して，大対蹠集合が $\mathcal{T}$ デザインになるのか考察する．実際，定理 5.3 と定理 5.5 で，大対蹠集合は $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインになることが示す．ここで

$$\mathcal{E} := \{(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{i}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-i}) \mid i = 0, 1, \ldots, m\},$$

$$\mathcal{F} := \{(2, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{i-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-i}) \mid i = 2, \ldots, m\} \subset P_m$$

とする．また $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザイン $X$ のサイズの下界も具体的に得られる：

$$|X| \geq \binom{n}{m}.$$

ここで下界の値は大対蹠集合のサイズに一致することに注意されたい．更に定理 5.9 で，$|X| = \binom{n}{m}$ を満たす $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザイン $X$ は必ず大対蹠集合になることも示す．つまり堅い $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインと大対蹠集合は同値であることを示す．このように幾何的に定義された対蹠集合の中でも最もサイズが大きいもの（大対蹠集合）と $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインの中でも最もサイズが小さいもの（堅い $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザイン）は一致しており，幾何学からとデザイン理論からという出処の違う二つの概念が，extremal な場合には一致するという繋がりは非常に興味深い現象である．

## 2 準備

この節では，対称空間上の対蹠集合や複素グラスマン空間，そしてユニタリ群の表現について述べる．

### 2.1 対蹠集合

$M$ を連結コンパクトなリーマン対称空間とする．$M$ の点 $x$ に対して，$x$ における点対称を $s_x$ で表す．$M$ の部分集合 $S$ が，任意の $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ をみたすときに $S$ を $M$ 上の**対蹠集合**と呼ぶ．対蹠集合は必ず有限集合になることが知られている．Chen–Nagano [8] は $M$ の 2-number を

$$\sharp_2 M := \max\{ \sharp S \mid S \text{ is an antipodal set in } M \},$$

によって定義した．また $|S| = \sharp_2 M$ となる対蹠集合 $S$ を**大対蹠集合**と呼ぶ．2-number は係数が $\mathbb{Z}_2$ の $M$ のホモロジー群 $H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ の次元と等しいことが知られている．

**事実 2.1** (Sánchez, Tanaka–Tasaki )．$M$ を対称 $R$ 空間とする．このとき，次が成立する：

(1) 任意の $M$ 上の対蹠集合 $S_0$ に対して，$S_0$ を含む大対蹠集合 $S$ が存在する．
(2) $M$ 上の大対蹠集合は $G$ 作用での合同変換によって一意に定まる．つまり，二つの大対蹠集合 $S$ と $S'$ に対して，$S' = gS$ なる $g \in G$ が存在する．

本報告書で我々が一番興味がある空間は複素グラスマン空間である．今後，この報告書内では，$n$ 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ はエルミート内積を持つとする．$\mathbb{C}^n$ 内の $m$ 次元部分空間からなる集合を $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ で表し，$\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ を**複素グラスマン空間**と呼ぶ．複素グラスマン空間はエルミート型対称空間であることが知られている．

次に複素グラスマン空間の点対称について述べる．点 $a \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ に対して，$a$ の直交補空間を $a^{\perp} \subset \mathbb{C}^n$ で表す．$\mathbb{C}^n$ 上の対合作用 $\tilde{s}_a$ を $a$ 上では恒等作用，$a^{\perp}$ では $-1$ 倍作用になる線形作用とする．このとき，$\tilde{s}_a$ は $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の対合的な等長変換 $s_a$ を引き起こす．この $s_a$ は $a \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ に対する点対称になる．

次に $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の対蹠集合の例を紹介する．

**例 2.2.** $\mathbb{C}^n$ 上の正規直交基底 $\{ e_1, \dots, e_n \}$ を一つ固定しておく．$\{1, 2, \dots, n\}$ の $m$ 個の元からなる部分集合 $I$ に対して，$a_I := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{ e_i \mid i \in I \}$ とすると，定義より $a_I \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ である．このとき，$|I| = |I'| = m$ なる $\{ 1, \dots, n \}$ の部分集合 $I$ と $I'$ に対して，$s_{a_I}(a_{I'}) = a_{I'}$ となることが簡単に示せる．それ故，

$$S := \{ a_I \mid I \text{ is a } m\text{-subset of } \{ 1, \dots, n \} \} \subset \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$$

は $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の対蹠集合であり，$|S| = \binom{n}{m}$ である．更にこの $S$ は大対蹠集合である．従って $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の任意の大対蹠集合は $U(n)$ 作用で $S$ に移り合う．

$\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の大対蹠集合 $S$ は Johnson scheme と呼ばれる $P$ かつ $Q$ 多項式アソシエーションスキームの構造が入ることが知られている．アソシエーションスキームに関しての詳細は Bannai–Ito [3] や Brouwer–Cohen–Neumaier [7] を参考にせよ．

## 2.2 $U(n)$ 作用

$n$ 次のユニタリ群とは

$$U(n) := \{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g^* g = I_n\}.$$

なる群であった．このユニタリ群 $U(n)$ は複素グラスマン空間 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ に

$$U(n) \times \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n} \to \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n},\ (g, a) \mapsto ga := \{gv \mid v \in a\}.$$

によって作用する．この $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ における $U(n)$ 作用は可移であることが知られている．$\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ の元として

$$a_0 := \{{}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0\} \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$$

とする．このとき $U(n)$ の $a_0$ に対する固定部分群 $K_m$ は

$$\{ g \in U(n) \mid I_{m,n-m} \circ g \circ I_{m,n-m} = g \} \subset U(n)$$

である．ここで

$$I_{m,n-m} := \begin{pmatrix} I_m & \\ & -I_{n-m} \end{pmatrix} \in U(n)$$

である．$U(n)$ の $K_m$ による等質空間を $U(n)/K_m$ で表す．このとき，写像

$$U(n)/K_m \to \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n},\ gK_m \mapsto ga_0.$$

は $U(n)/K_m$ と $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ の間の同相写像を与える．商写像

$$\pi : U(n) \to U(n)/K_m \simeq \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$$

で表す．

## 2.3 Main angles

$a \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ に対して，$\mathbb{C}^n$ から $a$ への直交射影を $P_a \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ で表す．このとき，$a, b \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ に対して，作用素 $P_a \circ P_b$ の固有値は区間 $[0,1]$ に属する実数になり，更に零でない固有値の個数は高々 $m$ になる．$P_a \circ P_b$ の固有値の中で大きいものから順に $y_1 \geq y_2 \geq \dots$ とし，**$a$ と $b$ の** *main angles* を $y(a,b) := (y_1, \dots, y_m)$ で定める．main angles が動く範囲を

$$\mathrm{Range}(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}) := \{\, (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid 1 \geq y_1 \geq \cdots \geq y_m \geq 0 \,\}$$

で表すと，このとき写像

$$y : \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n} \times \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n} \to \mathrm{Range}(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}), \quad (a,b) \mapsto y(a,b)$$

は普遍 $U(n)$ 不変になる．つまり任意の $g \in U(n)$ と $a, b \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ に対して，$y(ga, gb) = y(a,b)$ であり，任意の集合 $Z$ と任意の $U(n)$ 不変写像 $y' : \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n} \times \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n} \to Z$ に対して，$\varpi \circ y = y'$ なる写像 $\varpi : \mathrm{Range}(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}) \to Z$ が一意に存在する．

次の補題は点対称 $s_a$ と main angles $y(a,b)$ の定義から従う：

**補題 2.3.** $a, b \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ に対して，以下の 3 つの条件は同値である：

(1) $s_a(b) = b$.
(2) $b = (a \cap b) \oplus (a^{\perp} \cap b)$.
(3) $y(a,b)$ は $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ の形である．

**注意 2.4.** $a, b \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ とする．このとき $y(a,b) = (1, 1, \dots, 1)$ であることと $a = b$ であることは同値である．また $y(a,b) = (0, 0, \dots, 0)$ であることと $a \perp b$ であることは同値である．

## 2.4 $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の調和解析

この節では二乗可積分空間 $L^2(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n})$ 内の $U(n)$ 既約表現 $H_\mu$ について説明する．

**事実 2.5** (Highest weight theory for $U(n)$)**.** 同型を除いた $U(n)$ の複素既約ユニタリ表現の集合と高々 $n$ 個の整数の分割の集合の間には自然な全単射が存在する．以下

$$\widehat{U(n)} := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n\}.$$

として，$\lambda \in \widehat{U(n)}$ に対して，$\lambda$ に対応した $U(n)$ の既約ユニタリ表現を $V_\lambda$ で表す．また，

$$P_m := \{\, (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{Z}^m \mid \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_m \geq 0 \,\}$$

に対して $P_m$ から $\widehat{U(n)}$ の写像

$$\phi : P_m \to \widehat{U(n)},\ \mu \mapsto (\mu_1, \dots, \mu_m, 0 \dots, 0, -\mu_m, \dots, -\mu_1).$$

を考える．このとき，各 $\mu \in P_m$ に対して，

$$\dim V^{K_m}_{\phi(\mu)} = 1$$

であることが知られている．ここで $V^{K_m}_{\phi(\mu)} := \{v \in V_{\phi(\mu)} \mid gv = v \text{ for all } g \in K_m\}$ である．

各 $\mu \in P_m$ に対して，$w_\mu \in V_{\phi(\mu)}^{K_m}$ を一つ固定する．このとき $V_{\phi(\mu)}$ から $L^2(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ への $\mathbb{C}$ 線形写像 $\Phi$ を

$$\Phi(v)(a) := \langle v, g_a w_{\phi(\mu)} \rangle_{\phi(\mu)} \quad \text{for any } v \in V_{\phi(\mu)} \text{ and } a \in \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$$

として定める．ここで $g_a \in U(n)$ は $g_a \cdot a_0 = a$ を満たすものとする．以下，$H_\mu := \Phi(V_{\phi(\mu)})$ とする．ここで，$H_\mu$ は $w \in V_{\phi(\mu)}^{K_m}$ のとり方に依らない $L^2(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ の部分空間になることに注意されたい．

**注意 2.6.** 各 $\mu \in P_m$ に対し，$H_\mu$ は $U(n)$ のユニタリ表現として $H_\mu \simeq V_{\phi(\mu)}$ となる唯一の $L^2(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ の部分表現である．更に $\mu, \mu' \in P_m$ が $\mu \neq \mu'$ を満たせば，$L^2(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ 内で $H_\mu \perp H_{\mu'}$ が成り立つ．

**注意 2.7** (Peter–Weyl)**.** $\bigoplus_{\mu \in P_m} H_\mu$ は $L^2(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ 内で稠密である．

Lie 群の既約表現の次元は Weyl の指標公式 [24] で与えられることが知られている．$U(n)$ の場合，既約表現 $V_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}$ の次元は

$$\dim V_\lambda = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}$$

である．この公式より，次の表現の次元が得られる：

$$\dim H_{(1^i)} = \frac{n - 2i + 1}{n + 1} \binom{n+1}{i}^2, \tag{2.1}$$

$$\dim H_{(i)} = \frac{n + 2i - 1}{n - 1} \binom{n+i-2}{i}^2, \tag{2.2}$$

$$\dim H_{(2,1^{i-1})} = \frac{i^2(n+3)(n-2i+1)}{(n-i+2)^2} \binom{n+1}{i+1}^2. \tag{2.3}$$

# 3 帯球直交多項式

この節では $L^2(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ 内の $U(n)$ 既約表現 $H_\mu$ に付随する帯球直交多項式 $Z_\mu$ について説明する．帯球直交多項式はデザイン理論において重要な役割を果たす．

## 3.1 対称多項式と Schur 多項式

$m$ 変数多項式 $p(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{C}[y_1, y_2, \ldots, y_m]$ が $\{1, 2, \ldots, m\}$ 上の任意の置換 $\sigma$ に対して

$$p(y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \ldots, y_{\sigma(m)}) = p(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

を満たすときに $p$ を**対称多項式**と呼ぶ．$\mathbb{C}[y_1, y_2, \ldots, y_m]$ 内の対称多項式全体からなる空間を $\Lambda_m$ で表す．各 $i = 0, 1, \ldots, m$ に対して，

$$\mathfrak{e}_i(y_1, y_2, \ldots, y_m) := \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_i \leq m} y_{k_1} y_{k_2} \cdots y_{k_i} \in \Lambda_m$$

とし，また各 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

$$\mathfrak{h}_i(y_1, y_2, \ldots, y_m) := \sum_{1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_i \leq m} y_{k_1} y_{k_2} \cdots y_{k_i} \in \Lambda_m$$

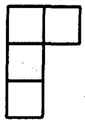
とする．多項式 $\mathfrak{e}_i(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ は $i$ **次の基本多項式**と呼ばれる．基本多項式は $\Lambda_m$ を生成する．つまり $\Lambda_m = \mathbb{C}[\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m]$ である．

各 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \in P_m$ に対して，

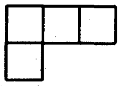
$$X_\mu(y) := \frac{\det(y_i^{\mu_j + m - j})_{i,j=1}^m}{\det(y_i^{m-j})_{i,j=1}^m}$$

と定義する．このとき $X_\mu$ は $\Lambda_m$ に属する．この $X_\mu$ を **$\mu$ の (非正規)** ***Schur*** **多項式**と呼ぶ．**正規** ***Schur*** **多項式** $X_\mu^*$ を $X_\mu^*(y_1, y_2, \ldots, y_m) := X_\mu(y_1, y_2, \ldots, y_m)/X_\mu(1, 1, \ldots, 1)$ によって定義する，つまり $X_\mu^*$ は $X_\mu^*(1, 1, \ldots, 1) = 1$ となるように $X_\mu$ を正規化したものである．

分割 $\mu \in P_m$ は Ferrers 図形として見ることが出来る．つまり，第 $i$ 番目の行が $\mu_i$ 個の箱を有する図形である．例えば $\mu = (2, 1, 1)$ の Ferrers 図形は以下のとおりである：

$\mu =$ 

分割 $\mu \in P_m$ に対して $\mu$ の共役な分割 $\mu'$ を，$\mu$ の Ferrers 図形の各列の箱の数からなる分割とする．上記の例の $\mu$ に対しては $\mu' = (3, 1)$ となり，その図形は以下のとおりである：

$\mu' =$ 

次の定理は Schur 多項式を $\mathfrak{e}_i$ や $\mathfrak{h}_i$ を用いて記述する公式である：

**定理 3.1** (Jacobi-Trudi Identity & Giambelli Identity).

$$X_\mu = \det(\mathfrak{h}_{\mu_i - i + j}),\ X_{\mu'} = (\mathfrak{e}_{\mu'_i - i + j})$$

が成り立つ．特に

$$X_{(i)} = \mathfrak{h}_i,\ X_{(1^i)} = \mathfrak{e}_i$$

である．

## 3.2 帯球直交多項式

$\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の $\mathbb{C}$ 値関数 $f$ が，点 $a \in \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ に対して $f(b)$ の値が $a$ と $b$ の principal angles の値にしか依らないとき，$f$ を**点 $a$ での帯球関数**と呼ぶ．次数 $k$ の対称関数 $p \in \Lambda_m$ を一つ固定したとき，**点 $a$ での $p$ の帯球関数**を

$$p_a(b) := p(y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

によって定義する．ここで $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ は $a$ と $b$ の principal angles である．

帯球関数は Delsarte 限界の理論において重要な役割を果たす．$H_\mu$ を $L^2(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ の既約表現とする．このとき各 $a \in \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ に対して，次の性質を満たす関数 $Z_{\mu,a} \in H_\mu$ が唯一存在する：

$$\langle Z_{\mu,a}, f \rangle = f(a) \text{ for any } f \in H_\mu. \tag{3.1}$$

性質 (3.1) より，集合 $\{Z_{\mu,a} \mid a \in \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}\}$ は $H_\mu$ 全体を張る．$Z_{\mu,a}(b)$ の値は $(a, b)$ の $U(n)$ 軌道のみに依ることが知られている．つまり，$Z_{\mu,a}(b)$ の値は $a$ と $b$ の principal angles の値にしか依らない関数である (cf. [23])．従ってこの $Z_{\mu,a}$ を **$H_\mu$ の $a$ での帯球直交多項式**と呼ぶ．これより我々は $Z_{\mu,a}(b)$ の値を $Z_\mu(a, b)$ や $Z_\mu(y(a, b))$ と表記することもある．

**命題 3.2.** $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の任意の部分集合 $X$ に対して，

$$\sum_{a,b \in X} Z_\mu(a, b) \geq 0$$

が成り立つ．また上の不等号で等号が成り立つための必要十分条件は

$$\sum_{a \in X} Z_{\mu,a} = 0$$

である.

帯球直交多項式を具体的に記述するためにいくつか記号を導入する．整数 $a$ に対して *ascending product* を

$$(a)_s := \prod_{i=1}^{s}(a+i-1)$$

とする．但し $(a)_0 := 1$ とする．また $\sigma = (s_1, \ldots, s_m) \in P_m$ に対して *complex hypergeometric coefficients* を

$$[a]_\sigma := \prod_{i=1}^{m}(a-i+1)_{s_i}$$

とする．$P_m$ 上に partial order $\leq$ を

$$(s_1, \ldots, s_m) \leq (k_1, \ldots, k_l) \text{ if and only if } s_i \leq k_i \text{ for all } i$$

によって定義する．$y+1 := (y_1+1, y_2+1, \ldots, y_m+1)$ としたとき，*complex hypergeometric binomial coefficients* $\left[\begin{smallmatrix}\kappa\\ \sigma\end{smallmatrix}\right]$

$$X^*_\kappa(y+1) = \sum_{\sigma\leq\kappa}\begin{bmatrix}\kappa\\ \sigma\end{bmatrix}X^*_\sigma(y)$$

によって定義する.

**定理 3.3** (James and Constantine [16]). $\rho_\sigma := \sum_{i=1}^m s_i(s_i-2i+1)$ とし，$\sigma, \kappa \in P_m$ に対して，$s := \sum_{i=1}^m \sigma_i$, $k := \sum_{i=1}^m \kappa_i$ とする．また

$$[c]_{(\kappa,\sigma)} := \sum_i \frac{\left[\begin{smallmatrix}\kappa\\ \sigma_i\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}\sigma_i\\ \sigma\end{smallmatrix}\right]}{(k-s)\left[\begin{smallmatrix}\kappa\\ \sigma\end{smallmatrix}\right]}\frac{[c]_{(\kappa,\sigma_i)}}{c+\frac{\rho_\kappa-\rho_\sigma}{k-s}}$$

とする．ここで右辺の和の添字 $i$ は分割 $\sigma_i := (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \ldots)$ が非増加かつ $\sigma_i \leq \kappa$ になる $i$ のみ動く．このとき $H_\kappa$ の帯球直交多項式は

$$Z_\kappa(y) := \sum_{\sigma\leq\kappa}\frac{(-1)^s\left[\begin{smallmatrix}\kappa\\ \sigma\end{smallmatrix}\right][n]_{(\kappa,\sigma)}}{[m]_\sigma}X^*_\sigma(y)$$

となる．ここで $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathrm{Range}(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n})$ である.

$H_\kappa$ **の正規帯球直交多項式** $Z^*_\mu$ は $Z^*_\mu(1,1,\ldots,1) = \dim H_\mu$ となるように $Z_\mu$ を正規化したものとする.

## 3.3 帯球直交多項式に関しての公式

この節では，大対蹠集合を特徴付けるデザインの性質を与えるために $H^*_{(1^i)}$, $H^*_{(2,1^{i-1})}$ の帯球直交多項式の具体的な記述を与える．この計算の詳しい過程は Kurihara–Okuda [17] に掲載予定である.

**定理 3.4.** 各 $i = 0, 1, \ldots, m$ に対して $H_{(1^i)}$ の正規帯球直交多項式は

$$Z^*_{(1^i)} = \frac{(n-2i+1)\binom{n+1}{i}^2}{(n+1)\binom{n-m}{i}}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{n-i+1}{j}\binom{m-j}{i-j}X^*_{(1^j)}$$

である．また各 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $H_{(i)}$ の正規帯球直交多項式は

$$Z^*_{(i)} = \frac{(n+2i-1)\binom{n+i-2}{i}^2}{(n-1)\binom{n-m+i-1}{i}}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{n+i+j-2}{j}\binom{m+i-1}{i-j}X^*_{(j)}$$

である.

正規 Schur 多項式 $X^*_{(1^i)}$ は正規帯球直交多項式 $\{Z^*_{(1^j)}\}_{i=0}^{j}$ の一次結合で書ける：

$$X^*_{(1^i)} = \sum_{j=0}^{i} \frac{n+1}{n-j+1} \frac{\binom{m-j}{i-j}\binom{n-m}{j}}{\binom{n-j}{i}\binom{n+1}{j}^2} Z^*_{(1^j)}. \tag{3.2}$$

**補題 3.5.** 各 $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $H_{(2,1^{i-1})}$ の正規帯球直交多項式は

$$\begin{aligned} Z^*_{(2,1^{i-1})} = & f_2 \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} \frac{1}{j+1} \binom{m-j}{i-j} \binom{n-i}{j-1} X^*_{(2,1^{j-1})} \\ & + f_1 \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j+1} \frac{1}{j} \binom{m-j}{i-j} \binom{n-i}{j-1} X^*_{(1^j)} + f_0 X^*_{(0)} \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{i(i+1)(n+2)(n+3)(n-2i+1)\binom{n+1}{i+1}^2}{(n-i+2)(n-m+1)\binom{n-m}{i}}, \\ f_1 &= \frac{i(i+1)(m+1)(n+3)(n-2i+1)\binom{n+1}{i+1}^2}{(n-i+2)(n-m+1)\binom{n-m}{i}} \text{ and} \\ f_0 &= (-1)^{i+1} \frac{i^2(m+1)(n+3)(n-2i+1)\binom{n+1}{i+1}^2\binom{m}{i}}{(n-i+2)^2(n-m+1)\binom{n-m}{i}} \end{aligned}$$

である．

**補題 3.6.** 各 $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して，積 $Z^*_{(1)} \cdot Z^*_{(1^i)}$ は $\{Z^*_\mu\}_{\mu \in P_m}$ の一次結合として

$$Z^*_{(1)} \cdot Z^*_{(1^i)} = a_i Z^*_{(2,1^{i-1})} + b^{(i)}_{i+1} Z^*_{(1^{i+1})} + b^{(i)}_i Z^*_{(1^i)} + b^{(i)}_{i-1} Z^*_{(1^{i-1})}$$

with

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{(i+1)(m+1)n(n-1)(n-i+2)(n-m+1)}{im(n+2)(n+3)(n-i+1)(n-m)} > 0, \\ b^{(i)}_{i+1} &= \frac{(i+1)(m-i)n(n-1)(n+1)(n-m-i)}{m(n-i+1)(n-2i)(n-2i-1)(n-m)} \geq 0, \\ b^{(i)}_i &= \frac{2i(n-1)(n+1)(n-i+1)(n-2m)^2}{m(n+2)(n-2i)(n-2i+2)(n-m)} \geq 0 \text{ and} \\ b^{(i)}_{i-1} &= \frac{(m-i+1)n(n+1)(n-1)(n-i+2)(n-m-i+1)}{im(n-2i+2)(n-2i+3)(n-m)} > 0 \end{aligned}$$

と書ける．

## 4 複素グラスマン空間上のコードとデザイン

この節ではまず，複素グラスマン空間上のコードとデザインの定義を与える．その後，デザインの同値条件や線形計画法を用いたデザインのサイズの下界を与える．

**定義 4.1.** $F \in \Lambda_m$ を $F(1, 1, \ldots, 1) \neq 0$ を満たす対称多項式とする．このとき $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ の空でない有限部分集合 $X$ が

$$F(a, b) = 0 \text{ for any } a, b \in X \text{ with } a \neq b$$

を満たすとき，$X$ を $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ **の** $F$ **コード**と呼ぶ．

$P_m$ の部分集合 $\mathcal{T}$ に対して，

$$H_{\mathcal{T}} := \bigoplus_{\mu \in \mathcal{T}} H_\mu$$

とする．また $\mathcal{T} = \emptyset$ の場合には

$$H_\emptyset := \{0\} \subset L^2(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n})$$

とする．

**定義 4.2.** $\mathcal{T}$ を $P_m$ の有限部分集合とする．$\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ の空でない有限部分集合 $X$ が

$$\frac{1}{|X|}\sum_{a \in X} f(a) = \frac{1}{\mu_{m,n}(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n})}\int_{\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}} f d\mu_{m,n} \quad \text{for any } f \in H_{\mathcal{T}},$$

を満たすとき，$X$ を **($\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の) $\mathcal{T}$ デザイン**と呼ぶ．ここで $\mu_{m,n}$ は $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の $U(n)$ 不変な Haar 測度とする．

**注意 4.3.** $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ を $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ を満たす $P_m$ の有限部分集合とする．このとき任意の $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の $\mathcal{T}$ デザインは $\mathcal{T}'$ デザインでもある．

**注意 4.4.** 任意の $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ の空でない有限部分集合 $X$ は $\emptyset$ デザインである．

**命題 4.5.** $X$ を $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ の空でない有限部分集合とし，$\mathcal{T}$ を $P_m$ の有限部分集合とする．このとき以下は同値：

1. $X$ は $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の $\mathcal{T}$ デザインである．
2. 任意の $\mu \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$ と $f_\mu \in H_\mu$ に対して，$\sum_{a \in X} f_\mu(a) = 0$ が成り立つ．
3. 任意の $\mu \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$ に対して，$\sum_{a,b \in X} Z^*_\mu(y(a,b)) = 0$ が成り立つ．

*Proof.* まず (1) と (2) の同値性について示す．$\mu \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$ を一つ固定する．このとき次の $H_\mu$ 上の関数を考える：

$$H_\mu \to \mathbb{C}, \quad f_\mu \mapsto \int_{\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}} f_\mu d\mu_{m,n}.$$

この関数は $\mathbb{C}$ 線形であり，$\mu_{m,n}$ が $U(n)$ 不変より，この関数もまた $U(n)$ 不変である．それ故 Riesz の表現定理より

$$\int_{\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}} f_\mu d\mu_{m,n} = \langle f_\mu, F_\mu \rangle \quad \text{for any } f_\mu \in H_\mu$$

なる $U(n)$ 不変な関数 $F_\mu \in H_\mu$ が唯一存在することが分かる．一方で注意 2.6 より，$L^2(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n})$ の部分空間 $H_\mu$ は非自明な $U(n)$ の既約表現である．従って $H_\mu$ 内に非負値をとる $U(n)$ 不変な関数は存在しない．よって $F_\mu = 0$ であり，これは

$$\int_{\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}} f_\mu d\mu_{m,n} = \langle f_\mu, F_\mu \rangle = 0 \quad \text{for any } f_\mu \in H_\mu$$

を意味する．この条件より (1) と (2) の同値性が得られる．

次に (2) と (3) の同値性について示す．$\mu \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$ を一つ固定する．このとき任意の $f_\mu \in H_\mu$ と $a \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ に対して

$$f_\mu(a) = \langle f_\mu, Z^*_{\mu,a} \rangle$$

が成り立つ．従って

$$\sum_{a \in X} f_\mu(a) = 0 \quad \text{for any } f_\mu \in H_\mu$$

という条件は

$$\sum_{a \in X} Z^*_{\mu,a} = 0$$

を意味する．また $\sum_{a\in X} Z^*_{\mu,a}$ の二乗ノルムは

$$\langle \sum_{a\in X} Z^*_{\mu,a}, \sum_{a\in X} Z^*_{\mu,a} \rangle = \sum_{a,b\in X} Z^*_\mu(y(a,b)).$$

であることより (2) と (3) の同値性が得られる． □

**命題 4.6** (Linear programming bounds). $c$ を以下の 3 つの条件を満たす $P_m$ 上の実数値関数とする：

1. $c(0) \neq 0$.
2. $c$ は有限な台を持つ．つまり
$$|\{ \mu \in P_m \mid c(\mu) \neq 0 \}| < \infty.$$
3. $\mathrm{Range}(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n})$ 上の関数
$$F := \sum_{\mu\in P_m} c(\mu) Z^*_\mu$$
は非負である．

$$\mathcal{T}_c^+ := \{\mu \in P_m \mid c(\mu) > 0\},$$
$$\mathcal{T}_c^- := \{\mu \in P_m \mid c(\mu) < 0\}$$

とする．このとき次の事が成り立つ：

1. $X$ を $\mathcal{T}_c^+$ デザインとする．このとき $|X| \geq \frac{F(1,\ldots,1)}{c_0}$ が成り立つ．
2. $X$ を $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ の空でない有限部分集合とする．もし $X$ が以下の 3 つの条件の内 2 つを満たしていれば，このとき残りの条件も満たす：

Condition A　$X$ は $\mathcal{T}_c^+$ デザインである．

Condition B　$X$ は $\mathcal{T}_c^-$ デザインかつ $F$ コードである．

Condition C　$|X| = \frac{F(1,\ldots,1)}{c_0}$.

*Proof.* $X$ を $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ の空でない有限部分集合とする．$F$ は非負より，

$$\sum_{a,b\in X} F(y(a,b)) \geq \sum_{a\in X} F(y(a,a)) = |X| F(1,\ldots,1)$$

を得る．一方で $F$ の定義より，

$$\sum_{a,b\in X} F(y(a,b)) = c(0)|X|^2 + \sum_{a,b\in X} \sum_{\mu\in\mathcal{T}_c^+\setminus\{0\}} c(\mu) Z^*_\mu(y(a,b)) + \sum_{a,b\in X} \sum_{\mu\in\mathcal{T}_c^-\setminus\{0\}} c(\mu) Z^*_\mu(y(a,b))$$

である．従って

$$\sum_{\mu\in\mathcal{T}_c^+\cup\mathcal{T}_c^-\setminus\{0\}} c(\mu) \sum_{a,b\in X} Z^*_\mu(y(a,b)) \geq |X|(F(1,\ldots,1) - c(0)|X|) \tag{4.1}$$

であり，等号が成り立つための必要十分条件は

$$F(y(a,b)) = 0 \quad \text{for any } a,b \in X \text{ with } a,b \in X,$$

つまり $X$ は $F$ コードである．

まず (1) を示す．$X$ は $\mathcal{T}_c^+$ であると仮定する．このとき命題 4.5 より

$$\sum_{a,b\in X} Z^*_\mu(y(a,b)) = 0 \quad \text{for any } \mu \in \mathcal{T}_c^+ \setminus \{0\}$$

を得る．この条件より (4.1) は

$$\sum_{\mu\in\mathcal{T}_c^-\setminus\{0\}} c(\mu)\sum_{a,b\in X} Z_\mu^*(y(a,b)) \geq |X|(F(1,\ldots,1)-c(0)|X|)$$

となる．更に命題 3.2 より

$$|X| \geq \frac{F(1,\ldots,1)}{c_0}$$

を得る．

次に (2) を示す．

If $A$ and $B$, then $C$　(4.1) と命題 4.5 より

$$0 = |X|(F(1,\ldots,1)-c(0)|X|)$$

である．$X$ は空でないので $|X| = \frac{F(1,\ldots,1)}{c_0}$ を得る．

If $B$ and $C$ then $A$　(4.1) と命題 4.5 より

$$\sum_{\mu\in\mathcal{T}_c^+\setminus\{0\}} c(\mu)\sum_{a,b\in X} Z_\mu^*(y(a,b)) = 0$$

である．更に命題 3.2 と命題 4.5 と $\mu\in\mathcal{T}_c^+\setminus\{0\}$ のときの $c(\mu)$ の正値性より，この条件から $X$ が $\mathcal{T}_c^+$ デザインであることが得られる．

If $C$ and $A$ then $B$　(4.1) と命題 4.5 より

$$\sum_{\mu\in\mathcal{T}_c^-\setminus\{0\}} c(\mu)\sum_{a,b\in X} Z_\mu^*(y(a,b)) \geq 0$$

である．更に命題 3.2 と命題 4.5 と $\mu\in\mathcal{T}_c^-\setminus\{0\}$ のときの $c(\mu)$ の負値性より，この条件から $X$ が $\mathcal{T}_c^-$ デザインであることが得られる．またこのとき (4.1) の等号が成立しているので，

$$F(y(a,b)) = 0 \quad \text{for any } a,b\in X \text{ with } a,b\in X$$

が成り立つ．

□

## 5　対蹠集合とデザインの関係

非負整数 $t$ に対して $\mathcal{T}_t := \{\mu\in P_m \mid |\mu|\leq t\}$ とする．ここで $|\mu| = \sum_{i=1}^m \mu_i$ である．Roy は $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の $t$ デザインを $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の $\mathcal{T}_t$ デザインとして定義した [23]．この節では先ず $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の 1 デザインのサイズの下界を与える：

**定理 5.1.** $X$ を $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の 1 デザインとする．このとき

$$|X| \geq \frac{n}{m}$$

が成り立つ．更に $m|n$ かつ $X$ は

$$\mathbb{C}^n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n/m} \text{ and } a_i \perp a_j \text{ if } i\neq j$$

を満たす $m$ 次元部分空間の集合 $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n/m}\}$ であることが，上の不等式の等号が成り立つための必要十分条件である．

**注意 5.2.** 注意 2.4 より，定理 5.1 に現れる集合 $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n/m}\}$ は $i = j$ のとき $y(a_i, a_j) = (1, 1, \ldots, 1)$, $i \neq j$ のとき $y(a_i, a_j) = (0, 0, \ldots, 0)$ を満たす．従って補題 2.3 より，堅い 1 デザインは $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の対蹠集合である．

*Proof of Theorem 5.1.* (3.2) より $X^*_{(1)}(y) = (\sum_{i=1}^m y_i)/m$ は $X^*_{(1)} = \frac{m}{n} Z^*_{(0)} + \frac{n-m}{n(n-1)(n+1)} Z^*_{(1)}$ と書ける．$P_m$ 上の実数値関数 $c$ を $\mu = 0$ のとき $c(0) = \frac{m}{n}$，$\mu = 1$ のとき $c(1) = \frac{n-m}{n(n-1)(n+1)}$，それ以外では $c(\mu) = 0$ と定める．このとき $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_c^+ = \{(0), (1)\}$ である．従って命題 4.6 より 1 デザインのサイズの下界が得られる．また等号成立条件は $m|n$ かつ，$a \neq b$ なる $a, b \in X$ に対して，$X^*_{(1)}(y(a,b)) = 0$ を満たすことである．任意の $a, b \in X$ と $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して，$y_i(a,b)$ は非負より，$X^*_{(1)}(y(a,b)) = 0$ は $y_i(a,b) = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)$ を意味する．従って注意 2.4 より

$$\mathbb{C}^n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n/m} \text{ and } a_i \perp a_j \text{ if } i \neq j$$

を得る． □

次にこの報告書の主題である大対蹠集合とデザインの関係を与える．$P_m$ の有限部分集合 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ は次のような集合であった：

$$\mathcal{E} = \{(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{i}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-i}) \mid i = 0, 1, \ldots, m\},$$

$$\mathcal{F} = \{(2, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{i-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-i}) \mid i = 2, \ldots, m\} \subset P_m.$$

**定理 5.3.** $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の大対蹠集合 $S$ は $\mathcal{E}$ デザインである．

*Proof.* $a, b \in S$ に対して，main angles $y(a,b)$ は $y(a,b) = (1^{m-k}, 0^k)$ の形である．$a \in S$ を一つ固定する．このとき $k = 0, 1, \ldots, k$ に対して，$y(a,b) = (1^{m-k}, 0^k)$ となる $b \in S$ の個数は $\binom{m}{k}\binom{n-m}{k}$ である．従って

$$\sum_{b \in S} X^*_{(1^j)}(y(a,b)) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}\binom{n-m}{k}\frac{\binom{m-k}{j}}{\binom{m}{j}} \doteq \binom{n-j}{m-j}$$

を得る．これより各 $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{b \in S} Z^*_{(1^i)}(y(a,b)) \\
&= \frac{(n-2i+1)\binom{n+1}{i}^2}{(n+1)\binom{n-m}{i}} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{n-i+1}{j} \binom{m-j}{i-j} \sum_{b \in S} X^*_{(1^j)}(y(a,b)) \\
&= \frac{(n-2i+1)\binom{n+1}{i}^2}{(n+1)\binom{n-m}{i}} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{n-i+1}{j} \binom{n-i}{m-i} \binom{n-j}{i-j} \\
&= (-1)^i \frac{(n-2i+1)\binom{n+1}{i}^2}{(n+1)\binom{n-m}{i}} \binom{n-i}{m-i} \binom{i-1}{i} = 0
\end{aligned}$$

を得る．つまり $\sum_{a,b \in S} Z^*_{(1^i)}(y(a,b)) = 0$ となり，命題 4.5 から $S$ が $\mathcal{E}$ デザインであることが得られる． □

**定理 5.4.** (1) $X$ を $\mathcal{E}$ デザインとする．このとき $|X| \geq \binom{n}{m}$ である．

(2) $X$ を $|X| = \binom{n}{m}$ を満たす $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ の部分集合とする．このとき次は同値：

(a) $X$ は $\mathcal{E}$ デザイン．

(b) $X$ は $\prod_{i=1}^m y_i$ コード．

*Proof.* (1): $X^*_{(1^m)}(y) = \mathfrak{e}_m(y) = \prod_{i=1}^m y_i$ は $y \in \mathrm{Range}(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n})$ に対して非負であることに注意する．$P_m$ 上の実数値関数 $c$ を $X^*_{(1^m)} = \sum_\mu c(\mu) Z^*_\mu$ によって定義する．このとき $c$ は $c(0) = 1/\binom{n}{m}$，$|\{\mu \in P_m \mid c(\mu) \neq 0\}| = m+1 < \infty$，$\mathcal{T}_c^+ = \mathcal{E}$，$\mathcal{T}_c^- = \emptyset$ を満たす．従って命題 4.6 (1) より $|X| \geq X^*_{(1^m)}(1,1,\ldots,1)/c(0) = \binom{n}{m}$ を得る．

(2): $X$ は $|X| = \binom{n}{m}$ を満たす $\mathcal{E}$ デザインであると仮定する．このとき $X$ は命題 4.6 の Condition A と Condition C を満たす．つまり $X$ は $\prod_{i=1}^m y_i$ コードであることを意味する．

逆に $X$ が $|X| = \binom{n}{m}$ を満たす $\prod_{i=1}^m y_i$ コードであると仮定する．このとき $X$ は命題 4.6 の Condition B と Condition C を満たす．つまり $X$ は $\mathcal{E}$ デザインであるあることを意味する． □

**定理 5.5.** $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ 上の大対蹠集合 $S$ は $\mathcal{F}$ デザインである．

*Proof.* 定理 5.3 の証明同様に，$\sum_{a,b\in S} Z^*_{(2,1^{j-1})}(y(a,b)) = 0$ であることを示す． □

**注意 5.6.** 定理 5.3 と定理 5.5 より，$\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインのサイズの下限もまた大対蹠集合のサイズ $\binom{n}{m}$ と一致することが導かれる．

**命題 5.7.** $\mathrm{Range}(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n})$ 上の実数値関数 $F$ を

$$F : \mathrm{Range}(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (y_1,\ldots,y_m) \mapsto \binom{n-2}{m-1}(\prod_{i=1}^m y_i)(\sum_{i=1}^m y_i) + \sum_{i=1}^m y_i(1-y_i)$$

と定義する．このとき $F$ は

$$F = c_0 + \sum_{j=1}^m c_{(1^j)} Z_{(1^j)} + \sum_{j=2}^m c_{(2,1^{j-1})} Z_{(2,1^{j-1})}$$

with

1. $c_0 = m\binom{n-2}{m-1}/\binom{n}{m} = \frac{m^2(n-m)}{n(n-1)}$,
2. $c_{(1^j)} \in \mathbb{R}$ for any $j = 1,\ldots,m$,
3. $c_{(2,1^{j-1})} > 0$ for any $j = 2,\ldots,m$,

と書ける．特に $\frac{F(1,\ldots,1)}{c_0} = \binom{n}{m}$ である．

*Proof.* 表記を簡単にするために $d_j^{(i)}$ を等式 (3.2) の $Z^*_{(1^j)}$ の係数とする．Schur 多項式の定義より $\prod_{i=1}^m y_i = X^*_{(1^m)}$，$\sum_{i=1}^m y_i = mX^*_{(1)}$，$\sum_{i=1}^m y_i^2 = \binom{m+1}{2}X^*_{(2)} - \binom{m}{2}X^*_{(1,1)}$ を得る．(3.2) と $i=1$ のときの補題 3.5 と補題 3.6 を用いると，$F$ は $\{Z^*_{(1^j)}\}_{j=0}^m$ と $\{Z^*_{(2,1^{j-1})}\}_{j=1}^m$ の実数値係数を持った一次結合で書き表せることが分かる．特に $Z^*_{(0)}$ と $Z^*_{(2)}$ と $Z^*_{(2,1^{j-1})}$ の係数は具体的に計算出来て，それぞれ $c_{(0)} = m\binom{n-2}{m-1}/\binom{n}{m} = \frac{m^2(n-m)}{n(n-1)}$，$c_{(2)} = 0$, $c_{(2,1^{j-1})} = d_j^{(m)} d_1^{(1)} a_j m \binom{n-2}{m-1} > 0$ となる．ここで $a_j$ は補題 3.6 に現れる正数である． □

**系 5.8.** $F$ は命題 5.7 で定めたものとする．$\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ の有限部分集合 $X$ に対して，もし $|X| = \binom{n}{m}$ であれば，このとき次のことが成り立つ：

1. $X$ は $\mathcal{E}$ デザインかつ $F$ コードと仮定する．このとき $X$ は $\mathcal{F}$ デザインである．
2. $X$ は $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインであると仮定する．このとき $X$ は $F$ コードである．

*Proof.* $c : P_m \to \mathbb{C}$ を

$$F = \sum_{\mu \in P_m} c(\mu) Z_\mu$$

によって定義する．このとき命題 5.7 より関数 $c$ は命題 4.6 の条件を満たす．次のことは同値である：

1. $X$ は $\mathcal{T}_c^+$ デザインである.
2. $X$ は $F$ コードかつ $\mathcal{T}_c^-$ デザインである.

命題 5.7 より $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_c^+ \subset \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{T}_c^- \subset \mathcal{E}$ が得られ，証明が完了する. □

**定理 5.9.** $X$ を $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の空でない有限部分集合とする．このとき次の 2 つの条件は同値：

1. $X$ は $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の大対蹠集合である.
2. $X$ は $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインかつ $|X| = \binom{n}{m}$ を満たす.

*Proof.* $X$ は $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の大対蹠集合であると仮定する．このとき $|X| = \binom{n}{m}$ である．このとき任意の $a, b \in X$ と $i = 1, \ldots, m$ に対して，$y_i(a, b)$ の値は 0 か 1 であり，これより $X$ が $F$ コードであることを得る．定理 5.3 で大対蹠集合は $\mathcal{E}$ デザインになることを示しているので，系 5.8 より，大対蹠集合 $X$ は $\mathcal{F}$ デザインである.

逆に $X$ は $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインかつ $|X| = \binom{n}{m}$ を満たすと仮定する．このとき系 5.8 より，$X$ は $F$ コードである．つまり，$a \neq b$ を満たす任意の $a, b \in X$ に対して $F(y(a, b)) = 0$ であり，これは $X$ が対蹠集合であることを意味する．今 $|X| = \binom{n}{m}$ を仮定しているので，$\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の大対蹠集合である. □

## 参考文献


[1] C. Bachoc, R. Coulangeon and G. Nebe. Designs in Grassmannian spaces and lattices. *J. Algebraic Combin.*, **16**(1):5–19, 2002.

[2] C. Bachoc, E. Bannai and R. Coulangeon. Codes and designs in Grassmannian spaces. *Discrete Math.*, **277**(1-3):15–28, 2004.

[3] E. Bannai and T. Ito. *Algebraic combinatorics. I.* The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc., Menlo Park, CA, 1984.

[4] E. Bannai and E. Bannai. A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres. *European J. Combin.*, **30**(6):1392–1425, 2009.

[5] E. Bannai and S.G. Hoggar. On tight $t$-designs in compact symmetric spaces of rank one. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **61**(3):78–82, 1985.

[6] E. Bannai and S.G. Hoggar. Tight $t$-designs and squarefree integers. *European J. Combin.*, **10**(2):113–135, 1989.

[7] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, and A. Neumaier. *Distance-regular graphs*, volume 18 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)* [*Results in Mathematics and Related Areas (3)*]. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[8] B.-Y. Chen and T. Nagano. A Riemannian Geometric Invariant and its Applications to a Problem of Borel and Serre. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **308**(1):273–297, 1988.

[9] P. Delsarte. An algebraic approach to the association schemes of coding theory. *Philips Res. Rep. Suppl.*, (10):vi+97, 1973.

[10] P. Delsarte, J.M. Goethals, and J.J. Seidel. Bounds for systems of lines, and Jacobi polynomials. *Philips Res. Rep.*, **30**:91*–105*, 1975.

[11] P. Delsarte, J.M. Goethals, and J.J. Seidel. Spherical codes and designs. *Geom. Dedicata*, **6**(3):363–388, 1977.

[12] C.D. Godsil. *Algebraic Combinatorics.* Chapman and Hall Mathematics Series, New York, 1993.

[13] S.G. Hoggar. $t$-designs in projective spaces. *European J. Combin.*, **3**(3):233–254, 1982.

[14] S.G. Hoggar. Parameters of $t$-designs in $FP^{d-1}$. *European J. Combin.*, **5**(1):29–36, 1984.

[15] S.G. Hoggar. Tight 4- and 5-designs in projective spaces. *Graphs Combin.*, **5**(1):87–94, 1989.

[16] A.T. James and A.G. Constantine. Generalized Jacobi polynomials as spherical functions of the Grassmann manifold. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **29**(3): 174–192, 1974.

[17] H. Kurihara and T. Okuda. A new charactarization of great antipodal sets by design theory on complex Grassmannian manifolds. In preparation.

[18] V.I. Levenshtein. Universal bounds for codes and designs, in: *Handbook of Coding Theory, vol. I, II.* North-Holland, Amsterdam, 1998, pp. 499–648.

[19] V.I. Levenshtein. Designs as maximum codes in polynomial metric spaces. Interactions between algebra and combinatorics. *Acta Appl. Math.*, **29**(1–2): 1–82, 1992.

[20] V.I. Levenshtein. On designs in compact metric spaces and a universal bound on their size. *Discrete Math.*, **192**(1): 251–271, 1998.

[21] Y.I. Lyubich. On tight projective designs. *Des. Codes Cryptogr.*, **51**(1): 21–31, 2009.

[22] A. Neumaier. Distances, graphs and designs. *J. Combin.*, **1**(2): 163–174, 1974.

[23] A. Roy. Bounds for codes and designs in complex subspaces. *J. Algebraic Combin.*, **31**(1): 1–32, 2010.

[24] M.R. Sepanski. *Compact Lie Groups.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 235., Springer, New York, 2007.

[25] M.S. Tanaka and H. Tasaki. The intersections of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type. *J. Math. Soc. Japan*, **64**(4): 1297–1332, 2012.